1. Napisati definicije linearnosti i vremenske nepromjenjivosti sustava Provjeriti da li su sustavi opisani slijedećim ulazno – izlaznim vezama linearni i vremenski nepromjenjivi:
   1. y(t) = t2x(t - 2)
   2. y(t) = 5x(t) + 4
   3. y[n] = x2[n – 3]

Sustav je linearan ako vrijedi:

* Odziv na x1(t) + x2(t) je y1(t) + y2(t)
* Odziv na ax1(t) je ay1(t), pri čemu je a proizvoljna realna ili kompleksna konstanta.

Prvo od navedenih svojstava nazivamo svojstvo aditivnosti, a drugo svojstvo homogenosti. Svojstva aditivnosti i homogenosti koja definiraju linearan sustav mogu se objediniti u jednu relaciju:

ax1(t) + bx2(t) → ay1(t) + by2(t)

(Iste relacije vrijede I u diskretnom vremenu.)

Sustav je vremenski nepromjenjiv ili invarijantan ako se njegova svojstva i ponašanje ne mijenjaju tijekom vremena. Za vremenski nepromjenjiv sustav S: x(t) → y(t) vrijedit će S: x(t – t0) → y(t– t0). Analogno vrijedi I za diskrente sustave.

Neka su ulazni signali definirani kao:

gdje su a i b proizvoljne realne ili kompleksne konstante, a r(t) i s(t) bilo koja dva kontinuirana signala.

Tada vrijedi:

S obzirom da vrijedi:

dani sustav proglašavamo linearnim.

Dodatno definirajmo:

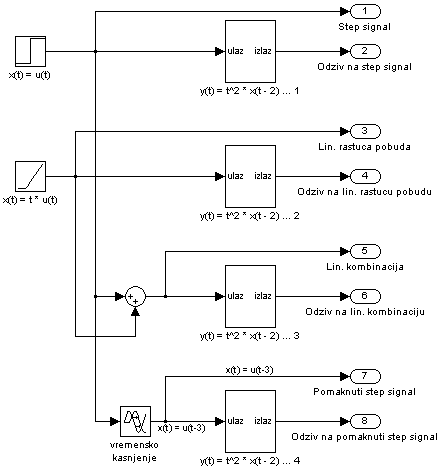
iz čega slijedi:

S obzirom da je sustav nije vremenski nepromjenjiv.

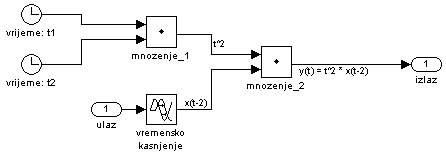
U konkretnom primjeru odrađenom na vježbi vrijede slijedeći parametri:

* r(t) = u(t),
* s(t) = t \* u(t),
* a = b = 1,
* t0 = 3

**Shema Simulink modela:**



gdje je sustav predstavljen crnom kutijom unutar koje se nalaze:



**.m - file za ispitivanje linearnosti:**

% ---------------------------------------------------

% definiranje minimuma i maksimuma koordinatnih osi

% [xMin, xMax, yMin, yMax]

in\_bounds = [-1, 5, 0, 6]; % shema za pobude

out\_bounds = [-1, 4, 0, 60]; % shema za odzive

% ------------------- Step --------------------------

% pobuda

subplot(2,3,1)

plot(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('x1(t)')

title('x1(t) = u(t)')

% odziv

subplot(2,3,4)

plot(tout,yout(:,2))

axis(out\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('y1(t)')

title('y1(t)')

% ------------ Linearno rastuca pobuda --------------

% pobuda

subplot(2,3,2)

plot(tout,yout(:,3))

axis(in\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('x2(t)')

title('x2(t) = t\*u(t)')

% odziv

subplot(2,3,5)

plot(tout,yout(:,4))

axis(out\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('y2(t)')

title('y2(t)')

% -------------- Linearna kombinacija ---------------

% pobuda

subplot(2,3,3)

plot(tout,yout(:,5))

axis(in\_bounds);

xlabel('t'); ylabel('x(t)')

title('x(t) = x1(t) + x2(t)')

% odziv

subplot(2,3,6)

plot(tout,yout(:,6))

axis(out\_bounds);

xlabel('t'); ylabel('y(t)')

if (yout(:,2) + yout(:,4) == yout(:, 6))

title('y(t) == y1(t) + y2(t)')

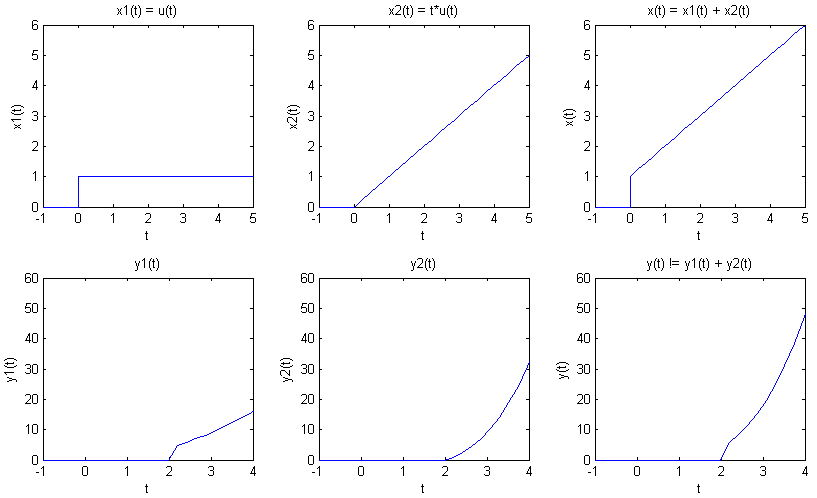
else

title('y(t) != y1(t) + y2(t)')

end

% ---------------------------------------------------

**Graf za ispitivanje linearnosti:**



**.m - file za ispitivanje vremenske nepromjenjivosti:**

% ---------------------------------------------------

% definiranje minimuma i maksimuma koordinatnih osi

% [xMin, xMax, yMin, yMax]

in\_bounds = [-1, 8, 0, 4]; % shema za pobude

out\_bounds = [-1, 8, 0, 80]; % shema za odzive

% ------------------- Step --------------------------

% pobuda

subplot(2,2,1)

plot(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('x1(t)')

title('x1(t) = u(t)')

% odziv

subplot(2,2,3)

plot(tout,yout(:,2))

axis(out\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('y1(t)')

title('y1(t)')

% ------------ Pomaknuti step signal ----------------

% pobuda

subplot(2,2,2)

plot(tout,yout(:,7))

axis(in\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('x2(t)')

title('x2(t) = u(t-3)')

% odziv

subplot(2,2,4)

plot(tout,yout(:,8))

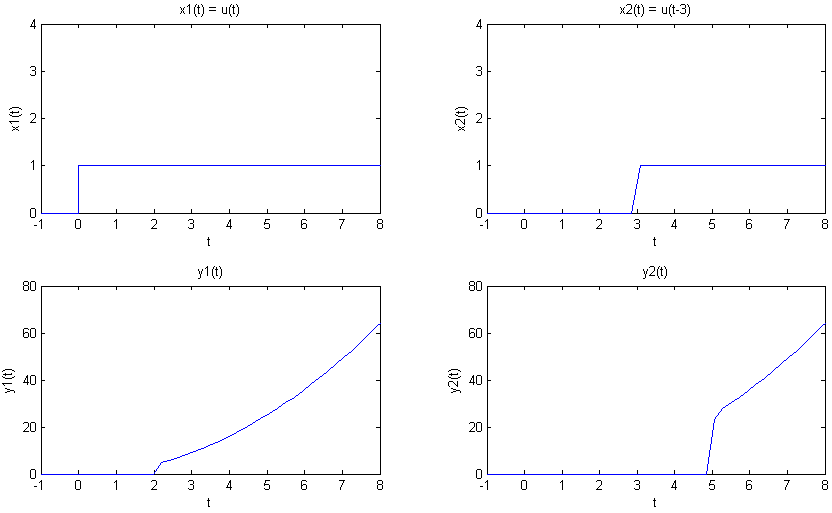
axis(out\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('y2(t)')

title('y2(t)')

% ---------------------------------------------------

**Graf za ispitivanje vremenske nepromjenjivosti:**



Neka su ulazni signali definirani kao:

gdje su a i b proizvoljne realne ili kompleksne konstante, a r(t) i s(t) bilo koja dva kontinuirana signala.

Tada vrijedi:

S obzirom da vrijedi:

dani sustav proglašavamo nelinearnim.

Dodatno definirajmo:

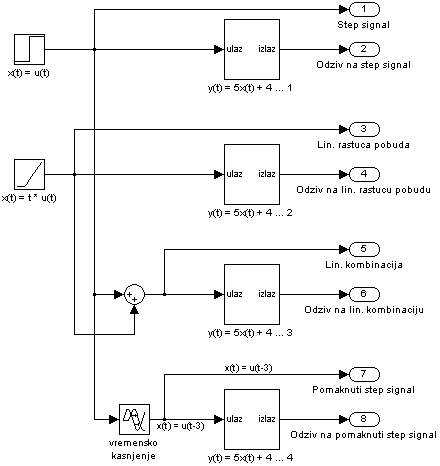
iz čega slijedi:

S obzirom da je sustav je vremenski nepromjenjiv.

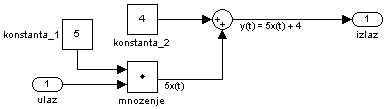
U konkretnom primjeru odrađenom na vježbi vrijede slijedeći parametri:

* r(t) = u(t),
* s(t) = t \* u(t),
* a = b = 1,
* t0 = 3

**Shema Simulink modela:**



gdje je sustav predstavljen crnom kutijom unutar koje se nalaze:



**.m - file za ispitivanje linearnosti:**

% ---------------------------------------------------

% definiranje minimuma i maksimuma koordinatnih osi

% [xMin, xMax, yMin, yMax]

in\_bounds = [-1, 5, 0, 6]; % shema za pobude

out\_bounds = [-1, 5, 0, 40]; % shema za odzive

% ------------------- Step --------------------------

% pobuda

subplot(2,3,1)

plot(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('x1(t)')

title('x1(t) = u(t)')

% odziv

subplot(2,3,4)

plot(tout,yout(:,2))

axis(out\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('y1(t)')

title('y1(t)')

% ------------ Linearno rastuca pobuda --------------

% pobuda

subplot(2,3,2)

plot(tout,yout(:,3))

axis(in\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('x2(t)')

title('x2(t) = t\*u(t)')

% odziv

subplot(2,3,5)

plot(tout,yout(:,4))

axis(out\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('y2(t)')

title('y2(t)')

% -------------- Linearna kombinacija ---------------

% pobuda

subplot(2,3,3)

plot(tout,yout(:,5))

axis(in\_bounds);

xlabel('t'); ylabel('x(t)')

title('x(t) = x1(t) + x2(t)')

% odziv

subplot(2,3,6)

plot(tout,yout(:,6))

axis(out\_bounds);

xlabel('t'); ylabel('y(t)')

if (yout(:,2) + yout(:,4) == yout(:, 6))

title('y(t) == y1(t) + y2(t)')

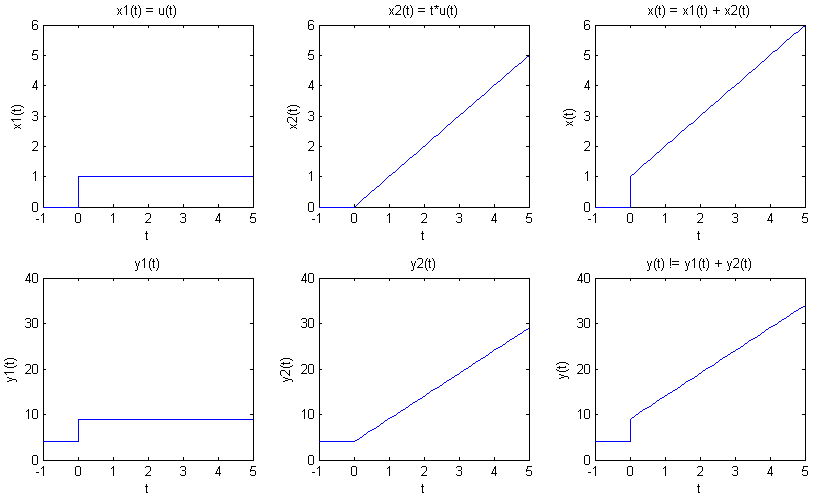
else

title('y(t) != y1(t) + y2(t)')

end

% ---------------------------------------------------

**Graf za ispitivanje linearnosti:**



**.m - file za ispitivanje vremenske nepromjenjivosti:**

% ---------------------------------------------------

% definiranje minimuma i maksimuma koordinatnih osi

% [xMin, xMax, yMin, yMax]

in\_bounds = [-1, 5, 0, 4]; % shema za pobude

out\_bounds = [-1, 5, 0, 10]; % shema za odzive

% ------------------- Step --------------------------

% pobuda

subplot(2,2,1)

plot(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('x1(t)')

title('x1(t) = u(t)')

% odziv

subplot(2,2,3)

plot(tout,yout(:,2))

axis(out\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('y1(t)')

title('y1(t)')

% ------------ Pomaknuti step signal ----------------

% pobuda

subplot(2,2,2)

plot(tout,yout(:,7))

axis(in\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('x2(t)')

title('x2(t) = u(t-3)')

% odziv

subplot(2,2,4)

plot(tout,yout(:,8))

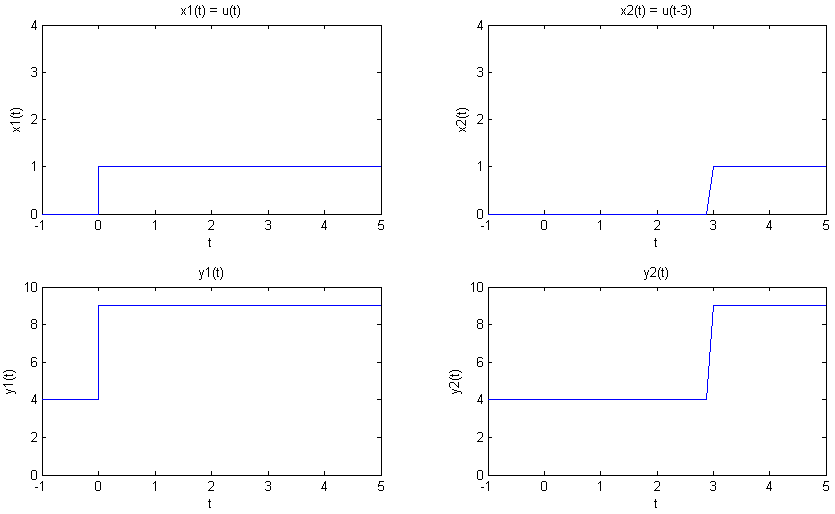
axis(out\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('y2(t)')

title('y2(t)')

% ---------------------------------------------------

**Graf za ispitivanje vremenske nepromjenjivosti:**



Neka su ulazni signali definirani kao:

gdje su a i b proizvoljne realne ili kompleksne konstante, a r[n] i s[n] bilo koja dva diskretna signala.

Tada vrijedi:

S obzirom da vrijedi:

dani sustav proglašavamo nelinearnim.

Dodatno definirajmo:

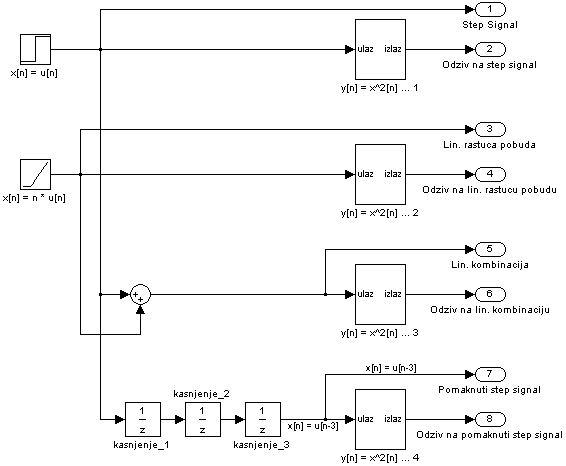
iz čega slijedi:

S obzirom da je sustav je vremenski nepromjenjiv.

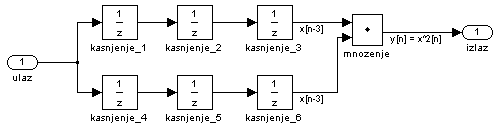
U konkretnom primjeru odrađenom na vježbi vrijede slijedeći parametri:

* r[n] = u[n],
* s[n] = n \* u[n],
* a = b = 1,
* t0 = 3

**Shema Simulink modela:**

****

gdje je sustav predstavljen crnom kutijom unutar koje se nalaze:



**.m - file za ispitivanje linearnosti:**

% ---------------------------------------------------

% definiranje minimuma i maksimuma koordinatnih osi

% [xMin, xMax, yMin, yMax]

in\_bounds = [-1, 5, 0, 6]; % shema za pobude

out\_bounds = [-1, 5, 0, 10]; % shema za odzive

% ------------------- Step --------------------------

% pobuda

subplot(2,3,1)

stem(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('x1[n]')

title('x1[n] = u[n]')

% odziv

subplot(2,3,4)

stem(tout,yout(:,2))

axis(out\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('y1[n]')

title('y1[n]')

% ------------ Linearno rastuca pobuda --------------

% pobuda

subplot(2,3,2)

stem(tout,yout(:,3))

axis(in\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('x2[n]')

title('x2[n] = t\*u[n]')

% odziv

subplot(2,3,5)

stem(tout,yout(:,4))

axis(out\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('y2[n]')

title('y2[n]')

% -------------- Linearna kombinacija ---------------

% pobuda

subplot(2,3,3)

stem(tout,yout(:,5))

axis(in\_bounds);

xlabel('n'); ylabel('x[n]')

title('x[n] = x1[n] + x2[n]')

% odziv

subplot(2,3,6)

stem(tout,yout(:,6))

axis(out\_bounds);

xlabel('n'); ylabel('y[n]')

if (yout(:,2) + yout(:,4) == yout(:, 6))

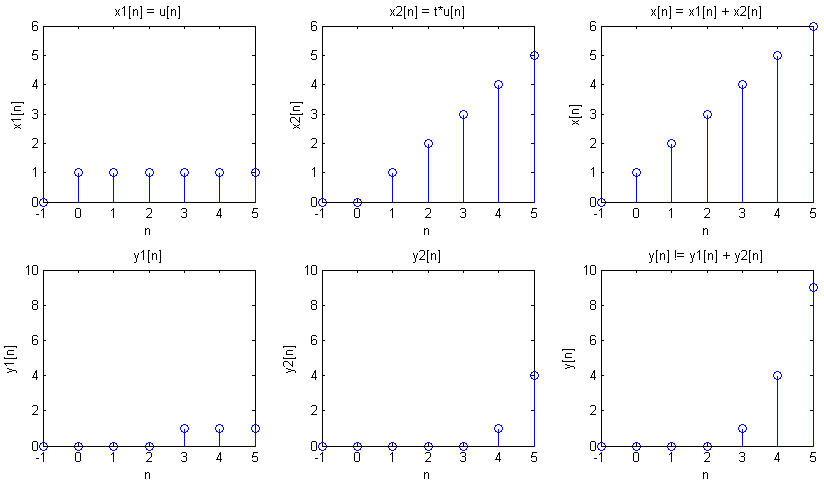
title('y[n] == y1[n] + y2[n]')

else

title('y[n] != y1[n] + y2[n]')

end

% ---------------------------------------------------

**Graf za ispitivanje linearnosti:**

**.m - file za ispitivanje vremenske nepromjenjivosti:**

% ---------------------------------------------------

% definiranje minimuma i maksimuma koordinatnih osi

% [xMin, xMax, yMin, yMax]

in\_bounds = [-1, 11, 0, 3]; % shema za pobude

out\_bounds = [-1, 11, 0, 3]; % shema za odzive

% ------------------- Step --------------------------

% pobuda

subplot(2,2,1)

stem(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('x1[n]')

title('x1[n] = u[n]')

% odziv

subplot(2,2,3)

stem(tout,yout(:,2))

axis(out\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('y1[n]')

title('y1[n]')

% ------------ Pomaknuti step signal ----------------

% pobuda

subplot(2,2,2)

stem(tout,yout(:,7))

axis(in\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('x2[n]')

title('x2[n] = u(t-3)')

% odziv

subplot(2,2,4)

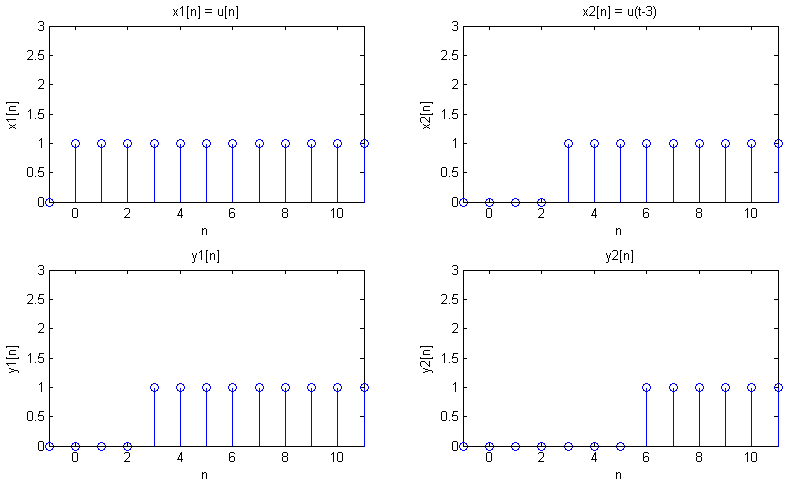
stem(tout,yout(:,8))

axis(out\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('y2[n]')

title('y2[n]')

% ---------------------------------------------------

**Graf za ispitivanje vremenske nepromjenjivosti:**

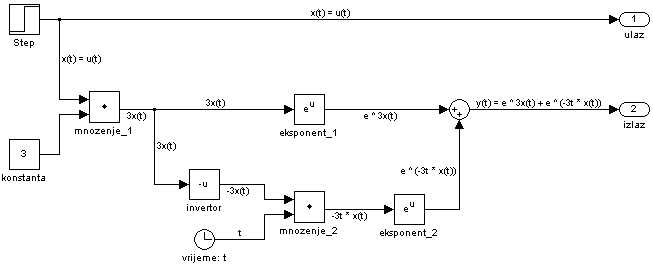
1. Napisati definiciju stabilnosti sustava. U Simulinku modelirati sustave sa slijedećim ulazno – izlaznim vezama i provjeriti stabilnost sustava:
2. y(t) = e3x(t) + e-3 \* tx(t)
3. y[n] = ea \* n \* sin(3/4\*pi\*n) \* x[n] pri čemu je a = ±2

Stabilnost promatramo tako da na ulaz dovedemo ograničenu pobudu (npr. step signal) i promatramo odziv.

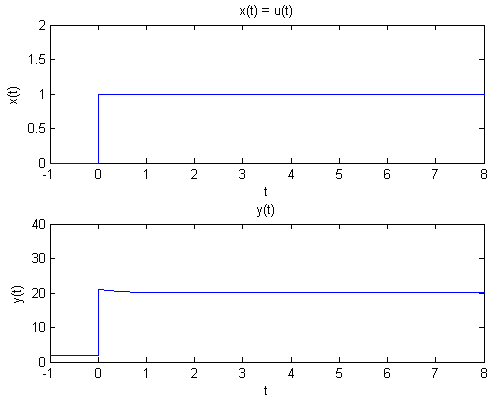
Stabilan sustav je onaj koji na ograničenu pobudu daje ograničeni odziv (tj. čiji izlaz ne divergira odnosno ne ide u beskonačnost).

1. y(t) = e3x(t) + e-3 \* tx(t)

**Shema sustava:**



**Graf pobude i odziva:**



Vidimo da izlazni signal ostaje u ograničenom području vrijednosti pa je dani sustav stabilan. To se očituje i iz formule s obzirom da je najznačajniji faktor upravo e-3 \* tx(t) koji također s vremenom dobiva sve veće matematičko značenje.

% Skripta koja crta grafove za ispitivanje stabilnosti sustava

% y(t) = e^(3x(t)) + e^(-3 \* t \* x(t))

% Ispitivanje se provodi dovodjenjem step signala na ulaz

% ---------------------------------------------------

% definiranje minimuma i maksimuma koordinatnih osi

% [xMin, xMax, yMin, yMax]

in\_bounds = [-1, 8, 0, 2]; % shema za pobudu

out\_bounds = [-1, 8, 0, 40]; % shema za odziv

% ------------------- Step --------------------------

% pobuda

subplot(2,1,1)

plot(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('t'); ylabel('x(t)')

title('x(t) = u(t)')

% odziv

subplot(2,1,2)

plot(tout,yout(:,2))

axis(out\_bounds)

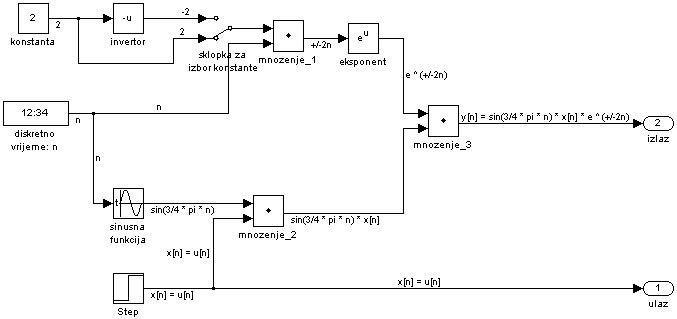
xlabel('t'); ylabel('y(t)')

title('y(t)')

% ---------------------------------------------------

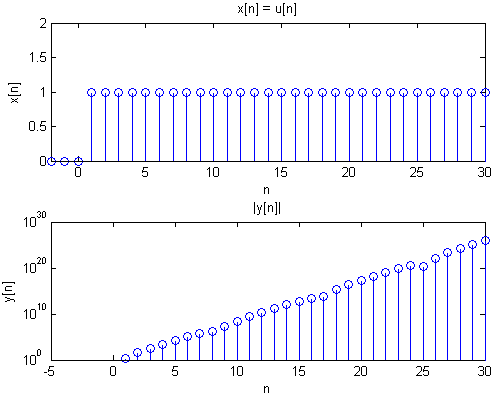
1. y[n] = ea \* n \* sin(3/4\*pi\*n) \* x[n] pri čemu je a = ±2

**Shema sustava:**

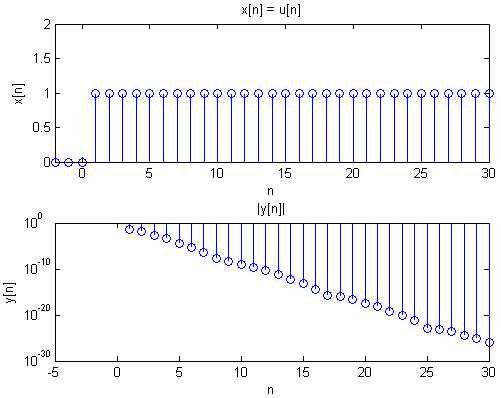


**Graf pobude i odziva:**

* za a = 2



* za a = -2



Na grafovima je prikazano opadanje odnosno porast reda veličine modula izlaznog signala. U prvom slučaju signal konstantno povećava red veličine pa je dani sustav nestabilan. U drugom slučaju red veličine se konstantno smanjuje s težnjom ka dostizanju nulte vrijednosti u beskonačnosti pa je dani sustav stabilan.

% Skripta koja crta grafove za ispitivanje stabilnosti sustava

% y[n] = e^an \* sin(3/4 \* pi \* n) \* x[n] pri cemu je a = 2, -2

% Ispitivanje se provodi dovodjenjem step signala na ulaz

% ---------------------------------------------------

% definiranje minimuma i maksimuma koordinatnih osi

% [xMin, xMax, yMin, yMax]

in\_bounds = [-2, 30, 0, 2]; % shema za pobudu

% ------------------- Step --------------------------

% pobuda

subplot(2,1,1)

stem(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('x[n]')

title('x[n] = u[n]')

% odziv

subplot(2,1,2)

stem(tout,abs(yout(:,2)))

set (gca, 'yScale', 'log')

xlabel('n'); ylabel('y[n]')

title('|y[n]|')

% ---------------------------------------------------

1. Zadana su dva sustava S1 i S2 sa svojim ulazno – izlaznim vezama:

S1: y1[n] = 2x1[n] + 4x1[n - 1]

S2: y2[n] = x2[n - 2] + 1/2\*x2[n - 3]

pri čemu su x1[n] i x2[n] ulazni signali u sustave.

Razmotrimo sustav S s ulazom x[n] i izlazom y[n], koji se dobije:

1. serijskom vezom sustava S1 i S2
2. paralelnom vezom sustava S1 i S2
3. Odrediti ulazno – izlaznu vezu sustava pod a) i b)
4. Odrediti odziv sustava pod a) i b) na diskretnu step pobudu
5. U Simulinku realizirati sustave pod a) i b) te simulirati odzive sustava na diskretnu pobudu. Usporediti rješenja dobivena pod 2) i 3)
6. Da li će se ulazno - izlazna veza i odziv sustava pod a) promijeniti ako zamijenimo mjesta sustavima S1 i S2 u serijskoj vezi (tj. ako S2 prethodi sustavu S1)? Odgovor provjeriti u Simulinku.
7. Kod serijske veze vrijedi:

Pa imamo:

**Konačno imamo (serijska veza S1-S2):**

Kod paralelne veze vrijedi:

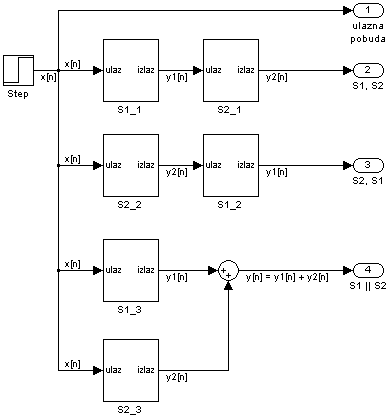
Pa imamo:

**Konačno imamo (paralelna veza):**

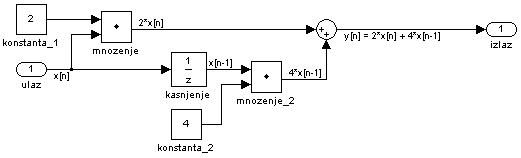
1. Odziv serijske veze sustava na diskretnu step pobudu iznosi, sukladno formuli:

Odziv paralelne veze sustava na diskretnu step pobudu iznosi, sukladno formuli:

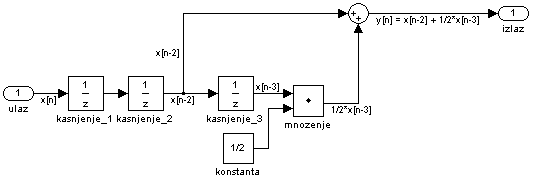
1. Shema sustava u Simulinku:



Gdje je sustav S1 realiziran kao:



a sustav S2 kao:

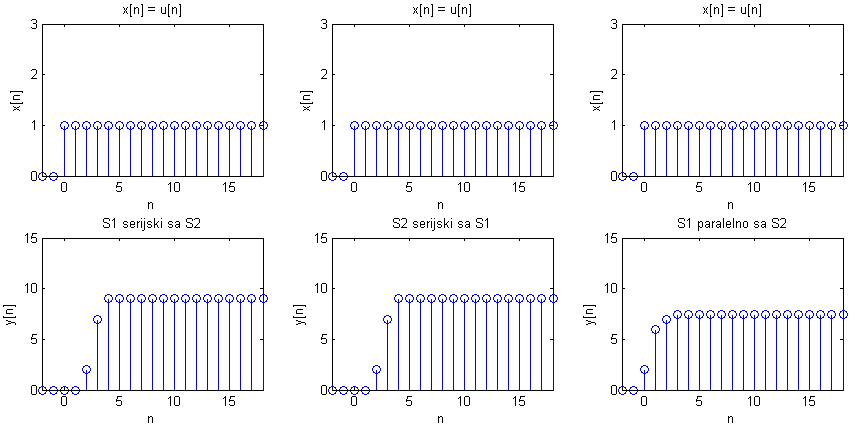


1. U slučaju zamjene mjesta serijski vezanih sustava vrijedi:

Pa imamo:

**Konačno imamo (serijska veza S2-S1):**

Vidimo da se ništa ne mijenja u formulaciji izlaznog signala pa je sasvim svejedno u kojem su redoslijedu povezani sustavi.

1. Provjera putem Simulinka:

**.m-file:**

% ---------------------------------------------------

% definiranje minimuma i maksimuma koordinatnih osi

% [xMin, xMax, yMin, yMax]

in\_bounds = [-2, 18, 0, 3]; % shema za pobude

out\_bounds = [-2, 18, 0, 15]; % shema za odzive

% ------------------- S1, S2 ------------------------

% pobuda

subplot(2,3,1)

stem(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('x[n]')

title('x[n] = u[n]')

% odziv

subplot(2,3,4)

stem(tout,yout(:,2))

axis(out\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('y[n]')

title('S1 serijski sa S2')

% ------------------- S2, S1-------------------------

% pobuda

subplot(2,3,2)

stem(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('x[n]')

title('x[n] = u[n]')

% odziv

subplot(2,3,5)

stem(tout,yout(:,3))

axis(out\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('y[n]')

title('S2 serijski sa S1')

% ------------------- S1 || S2 ----------------------

% pobuda

subplot(2,3,3)

stem(tout,yout(:,1))

axis(in\_bounds);

xlabel('n'); ylabel('x[n]')

title('x[n] = u[n]')

% odziv

subplot(2,3,6)

stem(tout,yout(:,4))

axis(out\_bounds)

xlabel('n'); ylabel('y[n]')

title('S1 paralelno sa S2')

% ---------------------------------------------------